MINIMIZACIÓN TABULAR QUINE-MC CLUSKEY

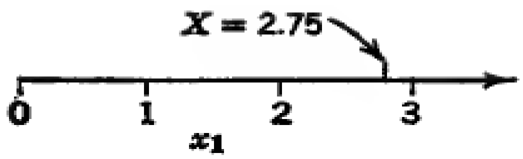
(86:44) Técnica Digital Avanzada- Unidad 1.

Profesor: Ing. Miguel Antonio Martínez.

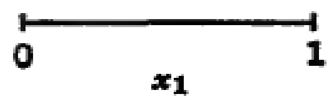
Minimización Tabular

Empezaremos este apunte viendo la representación de funciones booleanas en forma cúbica. Seguiremos con la simplificación tabular para luego ver métodos heurísticos cuando la solución no es tan simple de hallar, especialmente cuando son funciones de un cierto número de variables independientes. Al partir de este punto damos por conocidos los postulados de Huntington, los teoremas asociados a los postulados del Algebra de Boole, la noción de función booleana, la simplificación por mapas de Karnaugh y los términos como minitermino y maxitérmino.

Nosotros estamos familiarizados con la noción de una representación geométrica de una variable continua como una distancia a lo largo de una recta (figura a).



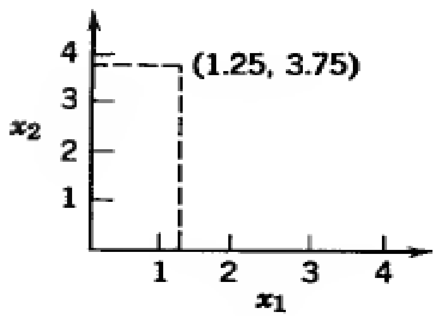
(a)



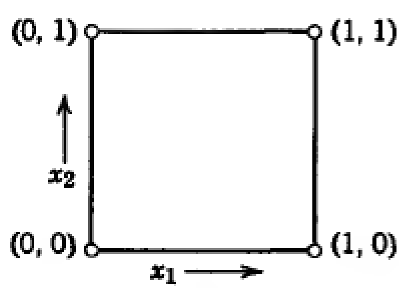
(b)

Del mismo modo, una variable de conmutación que puede asumir dos valores se puede representar mediante dos puntos en los extremos de una sola recta (figura b).

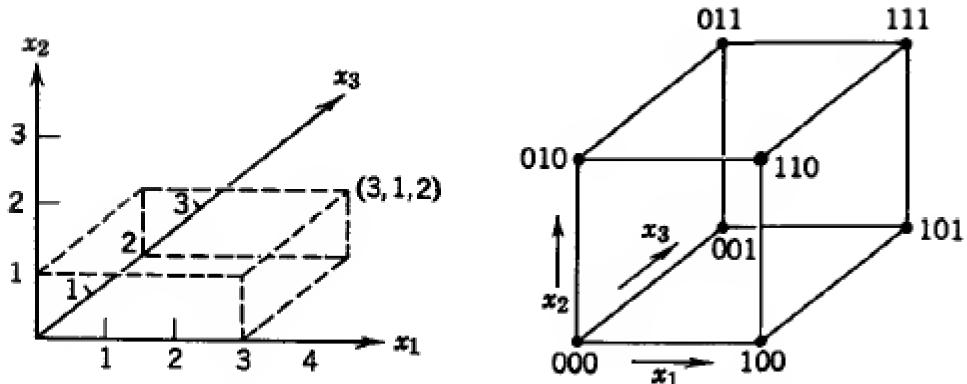
Esto se amplía para representar dos variables por medio de un punto en el plano como se ve en la siguiente figura.



Del mismo modo, los cuatro valores posibles de dos variables de conmutación se pueden representar mediante los cuatro vértices de un cuadrado.



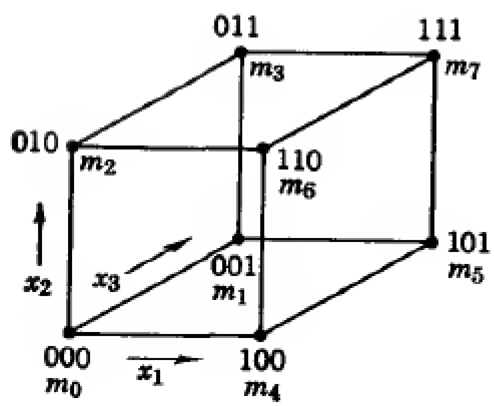
La ampliación a tres variables es un proceso evidente (figuras a y b). La extensión a más de tres variables, que requiere de figuras de más de tres dimensiones, es geométricamente difícil, pero bastante sencilla desde el punto de vista conceptual.



(a) (b)

En general, se dice que las diferentes combinaciones posibles de **n variables** se representan como puntos en el **espacio-n** y que la colección de todos los **2^n** puntos posibles forman los **vértices de un cubo-n** o un **hipercubo de Boole.**

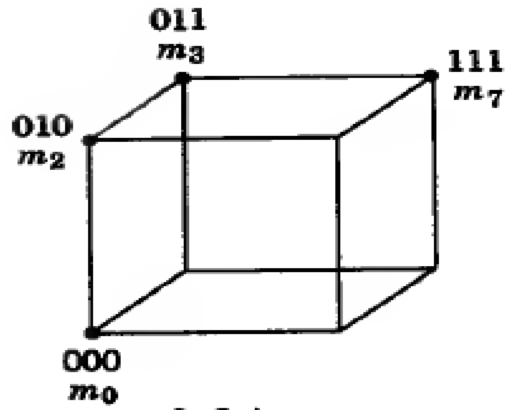
Para representar funciones en un cubo-n, se establece una correspondencia uno a uno entre los minitérminos de n-variables y los vértices del cubo-n. De donde, en un cubo-3, el vértice (000) corresponde al m_0, el vértice (001) a m_1, etc. Como se puede ver en la gráfica siguiente:



La representación cúbica de una función de n variables consta, entonces, del conjunto de vértices del cubo-n, correspondientes a los minitérminos de la función. Por ejemplo, la función:

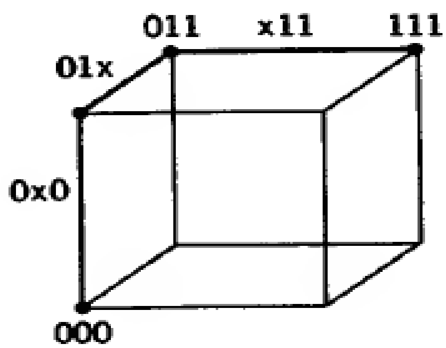
$$F(A, B, C) = \sum m(0, 2, 3, 7)$$

se representa en el cubo-3 como lo muestra la siguiente figura, el cual los vértices correspondientes a m_0, m_2, m_3 y m_7 se indican por medio de puntos negros. Estos vértices, correspondientes a los minitérminos, se pueden designar también como los **cubos-0** de la función. Los cubos-0, cubos-1, cubos-2, etc., se conocen más formalmente con **subcubos k** (k = 0, 1, 2, etc.), pero esta expresión es demasiado larga y se simplifica casi siempre a **cubo-k.**



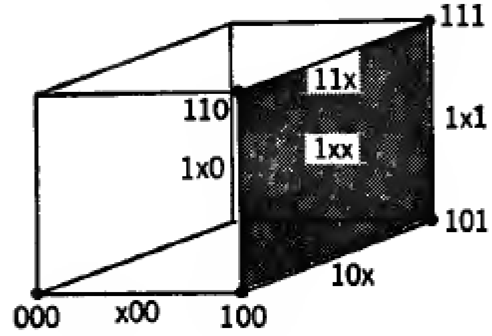
0–Cubes

Se dice que **dos cubos-0** de una función forman un **cubo-1**, si **difieren solo en una coordenada.** En la figura anterior se tienen tres cubos-1 formados por los pares de cubos-0 siguientes: 000 y 010, 010 y 011, y 011 y 111. Los cubos-1 se pueden designar poniendo una letra "**x"** en la coordenada que tiene diferentes valores y oscureciendo la línea entre el par de cubos-0. Ver figura próxima:



1–Cubes

De un modo similar, se dice que un conjunto de cuatro cubos-0 cuyos valores de coordenadas son iguales en todas las variables excepto dos, forman un cubo-2 de la función. Pictóricamente, un cubo-2 se puede representar como un plano sombreado. En la siguiente gráfica se representa una función cúbica de una función que presenta cinco cubos-0, cinco cubos-1 y un cubo-2.



Cuando todos los vértices (cubos 0) de un cubo –h están en el conjunto de vértices que componen un cubo-k mayor, se dice que el cubo más pequeño está contenido en o **cubierto por** el cubo mayor. Por ejemplo, en la figura anterior el cubo-0 100 está contenido dentro de los cubos-1 x00, 10x y 1x0 y en el cubo-2 1xx. De igual manera, todos los cubos-1 1x0, 10x, 11x y 1x1 están contenidos en el cubo-2 1xx.

Las correspondencias entre la representación cúbica y el mapa de Karnaugh son evidentes. Los cubos-0 corresponden a los cuadrados del mapa K, los cubos-1 a los pares de cuadrados adyacentes, etc. La nomenclatura cúbica se puede aplicar directamente al mapa K, sin hacer referencia a la representación cúbica, pero esta última hace más claro el origen y el significado de estos términos.

Método de Quine-Mc Cluskey.

El mapa de Karnaugh es un instrumento de diseño muy poderoso, pero con ciertas desventajas. En primer lugar, se trata básicamente de un método de prueba y error que no ofrece ninguna garantía de producir la mejor realización. En segundo lugar, su desentendencia de la capacidad algo "intuitiva" del ser humano en reconocer patrones hace que sea inapropiado para cualquier forma de mecanización como, por ejemplo, la programación en una computadora digital. Cuando se tienen funciones de seis o más variables, es difícil que el diseñador tenga la seguridad de que ha escogido el conjunto de productos más pequeños posible, basándose en un mapa de Karnaugh.

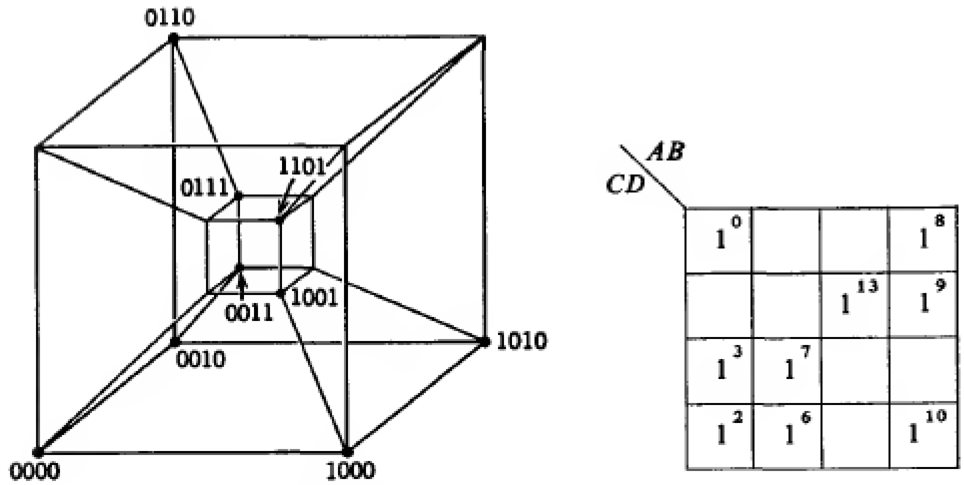
Hay un método tabular basado principalmente en el trabajo de W. V. Quine y E. J. McCluskey que ayuda a corregir estas deficiencias. Este método es fundamentalmente un procedimiento organizado ingeniosamente para efectuar una búsqueda exhaustiva de todas las combinaciones posibles de cubos-0 (minitérminos) en cubos mayores (de dimensión más alta) y, luego, seleccionar la combinación mínima de cubos requerida para realizar la función.

El punto de partida del método Quine-McCluskey es la lista de minitérminos de la función. Si la función no está en esta forma, se debe convertir a ella por métodos ya conocidos y algunos que veremos más adelante. Supongamos que tenemos la función:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$$

En la siguiente figura se ilustra la representación cúbica y el mapa de Karnaugh de esta función.

El primer paso consiste en encontrar todos los cubos-1 de la función. Por definición, se puede encontrar un cubo-1 combinando dos cubos-0 que sean idénticos excepto en una variable.



(a) Cubical Representation (b) K-map

Primeramente, los minitérminos se convierten a la forma binaria como se muestra en la figura siguiente:

Minterm	Binary Form	No. of 1's
m_0	0000	0
m_2	0010	1
m_3	0011	2
m_6	0110	2
m_7	0111	3
m_8	1000	1
m_9	1001	2
m_{10}	1010	2
m_{13}	1101	3

A continuación se reordena la lista de minitérminos de acuerdo con el número de unos en las representaciones binarias. Después se separan los minitérminos en grupos con el mismo número de unos por medio de líneas horizontales. Este agrupamiento se hace para reducir la cantidad de comparaciones que se deben efectuar para determinar los cubos-1. Si se deben combinar dos minitérminos, su representación binaria debe idéntica excepto en una posición, en la que un mintérmino tendrá un 0 y el otro un 1.

Una vez que se han agrupados los minitérminos, el procedimiento para encontrar los cubos-1 es bastante sencillo. Compare cada minitérmino del grupo superior con cada minitérmino del siguiente grupo yendo hacia abajo. Si los dos minitérminos son iguales en todas las posiciones excepto en una, coloque una marca (~) a la derecha de los dos minitérminos para indicar que están cubiertos, y anote un cubo-1 en la siguiente columna. Anote la forma cúbica del cubo-1 con una "x" en la posición que no concuerden como así también los números decimales de los minitérminos combinados. En este caso m_0 (0000) se combina con m_2 (0010) para formar (00x0).

La combinación de dos vértices dentro de un cubo-1 representa una aplicación de la ley distributiva como sucede con la combinación de dos cuadrados en el mapa de Karnaugh, por ejemplo la combinación de m_0 y m_2 es equivalente a la operación algebraica:

$$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{D}\ (C + \bar{C}) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{D}$$

El minitérmino m_0 se combina también con el mintérmino m_8 para formar (x000). Esto completa la comparación entre los minitérminos de los dos primeros grupos, de manera que se traza una línea por debajo de los cubos-1 resultantes. A continuación, se comparan en la firma forma los minitérminos del segundo y tercer grupos. Esta comparación produce cinco cubos-1 más, formados por m_2 y m_3, m_8 y m_9, etc. Se traza una recta debajo de estos cinco cubos-1 para indicar la terminación de las comparaciones entre el segundo y tercer grupos. Hay que observar que cada minitérmino de un grupo se debe comparar con cada minitérmino del otro grupo, incluso si cualquiera o ambos ya han sido marcados (~) y han formado un cubo-1.

1's	Minterms	
0	m_0	0000 ✓
1	m_2	0010 ✓
	m_8	1000 ✓
2	m_3	0011 ✓
	m_6	0110 ✓
	m_9	1001 ✓
	m_{10}	1010 ✓
3	m_7	0111 ✓
	m_{13}	1101 ✓

(a)

1-Cubes	
0,2	00x0 ✓
0,8	x000 ✓
2,3	001x ✓
2,6	0x10 ✓
2,10	x010 ✓
*8,9	100x
8,10	10x0 ✓
3,7	0x11 ✓
6,7	011x ✓
*9,13	1x01

(b)

2-Cubes	
*0,2,8,10	x0x0
*2,3,6,7	0x1x

(c)

Este proceso de comparación se repite entre los grupos sucesivos hasta que se agote la lista de minitérminos. En este caso, todos los minitérminos se deben marcar, indicando que todos se combinan por lo menos en cubos-1.

El siguiente paso es una búsqueda en la figura b para tratar de encontrar combinaciones posibles de pares de cubos-1 en cubos-2. Nuevamente solo los cubos de cada grupo se deben compara con los del grupo siguiente hacia abajo. Además se deben comparar los cubos que solo tienen el mismo dígito sustituido por una "x". En este caso, el cubo-1 0, 2 (00x0) se debe comparar con el cubo-1 8, 10 (10x0). Ambos difieren en una sola variable y se combina para formar el cub0-2 0, 2, 8, 10 (x0x0). También se ve que el cubo 0, 8 (x000) se combina con el 2, 10 (x010) para formar el cubo 0, 2, 8, 10 (x0x0).

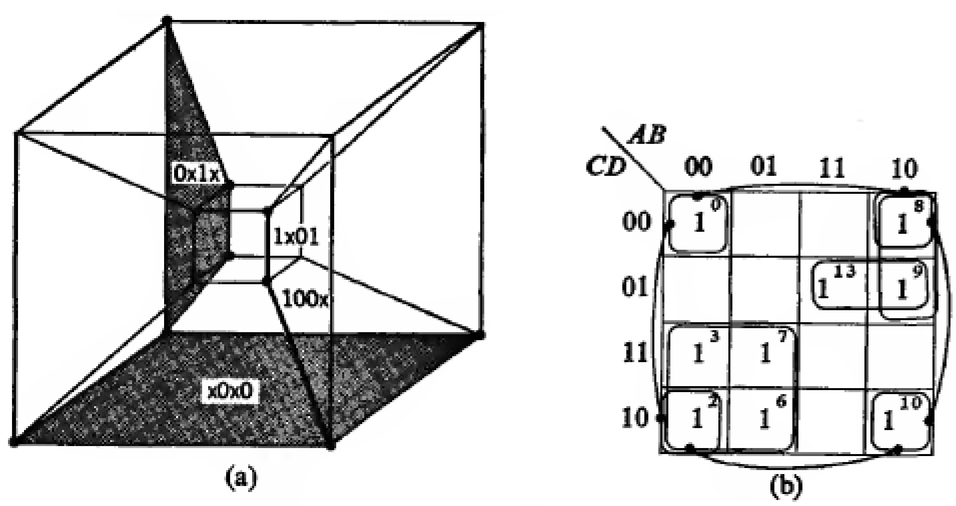
No se pueden lograr más combinaciones entre el primero y el segundo grupo, así que se traza una línea debajo del cubo-2 formado. A continuación se comparan el segundo y tercer grupo de la misma manera, dando como resultado otro cubo-2. Esto completa la comparación de los cubos-1 y cualquier entrada no marcada 8, 9 y 9, 13 en este caso, se marca con un asterisco (*) para indicar que son **implicantes primos.**

Si no se puede combinar cualquiera de los minitérminos en la primera etapa, deben marcarse también como implicantes primos. Por último los cubos-2 se verifican para saber si hay una combinación posible de cubos-3. Puesto que las “x” están en diferentes posiciones, estos cubos no se combinan y, por ende, son implicantes primos. Para este ejemplo, la determinación de los implicantes primos ha quedado completa. En el caso general, el mismo procedimiento continua, siempre y cuando se puedan seguir formando cubos mayores.

Definición: “Un implicante Primo (IP) es cualquier cubo de una función que no esté totalmente contenido en otro cubo mayor de dicha función”.

Selección de un conjunto óptimo de implicantes primos:

Todos los implicantes primos para el ejemplo anterior se indican en el cubo-4 y sobre el mapa de Karnaugh en la figura siguiente.



Prime Implicants of $\sum m(0,2,3,6,7,8,9,10,13)$

Si se interpreta los cubos-K como conjuntos de 1 en el mapa de Karnaugh, se ve que cada cubo-K estará representado en una realización de suma de productos por medio de un término producto con n – k literales. Por lo tanto, cualquier conjunto de cubos-K que contengo todos los cubos-0 (minitérminos) de la función proporcionará una realización de suma de productos. Para completar el diseño se debe seleccionar un conjunto de cubos-K que contenga todos los cubos-0 y, más todavía, que conduzca a una realización mínima de suma de productos. Afortunadamente, no es necesario tomar en cuenta todos los cubos-K de una función, como se puede ver en el siguiente teorema, debido a Quine.

Teorema: "Cualquier realización de suma de productos que sea mínima, debe constar de una suma de productos representando los implicantes primos.

Este teorema indica que se puede restringir la atención a los implicantes primos, al seleccionar una realización de suma de productos. No obstante, el teorema no afirma que cualquier suma de implicantes primos que cubre todos los minitérminos sea **mínima.** Para encontrar una suma mínima se debe construir una **Tabla de Implicantes Primos (TIP).**

		0	2	3	6	7	8	9	10	13
	0,2,8,10(2,8)	✓	✓				✓		✓	
	2,3,6,7(1,4)		✓	✓	✓	✓				
	8,9(1)						✓	✓		
	9,13(4)							✓		✓

Cada columna corresponde a un minitérmino. A la izquierda de cada hilera o renglón se indican los implicantes primos de la función acomodados en grupos de acuerdo con el costo (número de literales del producto). También se incluye una columna adicional a la izquierda y una hilera adicional en la parte inferior, por razones que explicaremos más adelante. En cada hilera (excepto la inferior) se anotan marcas en las columnas correspondientes a los minitermimos contenidos dentro del implicante primo anotado en dicha hilera. Por ejemplo el primer implicante primo señalado contiene los cubos-0 0, 2, 8 y 10, de manera que se anotan marcas en la primera hilera en las columnas 0, 2, 8 y 10.

A continuación se examina la tabla de implicantes primos ya completa para ver las columnas que contienen una sola marca. En este ejemplo se encuentra una sola marca en la primera columna sobre la primera hilera. Esto indica que el implicante primo correspondiente a 0, 2, 8, 10 es el único que contiene a m_0 y se debe incluir en la SdP. De donde se dice que es un **Implicante Primo Esencial (IPE),** y se marca con un asterisco en la columna extrema izquierda. También se colocan marcas en la hilera de la base de las columnas 0, 2, 8 y 10 para indicar que están incluidas en un implicante primo ya seleccionado.

Siguiendo con la búsqueda se encuentra una sola marca en la columna 3, indicando que el implicante primo 2, 3, 6, 7 es el único que cubre m_3. Este implicante se marca como esencial y se pone una marca en los minitérminos que cubre, que no hayan estado cubiertos por el primero que se seleccionó. Por último se encuentra que 9, 13 también es esencial.

Cuando concluye la búsqueda de implicantes primos esenciales, se examina la hilera de la base, para ver si se han marcado todas las columnas. Si es así, entonces, todos los cubos-0 están contenidos en los implicantes primos esenciales y la suma de estos es la realización mínima de SdP. Este es el caso del ejemplo examinado. El paso final es determinar los productos reales. Para hacer esto, se recuerda que los números de diferencia para cada implicante primo, indican las variables que se han eliminado.

		0	2	3	6	7	8	9	10	13
*	0,2,8,10(2,8)	✓	✓				✓		✓	
*	2,3,6,7(1,4)		✓	✓	✓	✓				
	8,9(1)						✓	✓		
*	9,13(4)							✓		✓
		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

$$0,2,8,10(2,8) = \emptyset 0 \emptyset 0 \rightarrow \bar{B}\bar{D}$$
$$2,3,6,7(1,4) = 0 \emptyset 1 \emptyset \rightarrow \bar{A}C$$
$$9,13(4) = 1 \emptyset 01 \rightarrow A\bar{C}D$$

$$f(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13) = \bar{B}\bar{D} + \bar{A}C + A\bar{C}D$$

El ejemplo anterior con los implicantes primos esenciales cubrimos todos los minitérminos, veremos ahora ejemplos donde esto no ocurre y tendremos que realizar más pasos construyendo lo que se llama la **Tabla de Implicantes Primos Secundaria (TIPS).**

Veremos ahora el caso de la siguiente función:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 4, 5, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$$

Si graficamos la función en un mapa de Karnaugh queda:

	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	1
11			1	1
10			1	1

Como se puede apreciar hay 4 Implicantes primos. Aplicando el método de Quine-McCluskey nos queda una tabla:

Minitermino	A B C D	Cant unos.
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	1
4	0 1 0 0	1
5	0 1 0 1	2
9	1 0 0 1	2
10	1 0 1 0	2
11	1 0 1 1	3
13	1 1 0 1	3
14	1 1 1 0	3
15	1 1 1 1	4

Aplicando el método conocido, tomo cada elemento de un grupo y los voy comparando con el siguiente tratando de encontrar palabras que difieran en un solo bits. Llegamos a:

	A B C D
(0,1)	0 0 0 x
(0,4)	0 x 0 0
(1,5)	0 x 0 1
(1,9)	x 0 0 1
(4,5)	0 1 0 x
(5,13)	x 1 0 1
(9,11)	1 0 x 1
(9,13)	1 x 0 1
(10,11)	1 0 1 x
(10,14)	1 x 1 0
(11,15)	1 x 1 1
(13,15)	1 1 x 1
(14,15)	1 1 1 x

En la primera tabla tendríamos que marcar los minitérminos (cubos-0) que pudimos agrupar. En este caso agrupamos todos, por lo cual es trivial hacerlo. Ahora, en la segunda tabla, comparamos cada elemento de un grupo buscando aquellas palabras que tengan “x” en las mismas columnas y que, además, difieran en un solo bits. Llegamos a lo siguiente:

	A B C D
(0,1,4,5)	0 x 0 x
(1,5,9,13)	x x 0 1
(9,11,13,15)	1 x x 1
(10,11,14,15)	1 x 1 x

El paso siguiente sería buscar palabras que coincidan en dos “x” en la misma columna y además difieran en un bit. Como se ve eso ya no se consigue. Además, nuevamente decimos que deberíamos marcar las palabras combinadas, otra vez combinamos todas así que no es necesario.

Ahora, para encontrar la **cobertura mínima** y ver si cubrimos todos los minitérminos hacemos la **Tabla de Implicantes Primos (TIP).** Recordemos que la misma tiene como filas los implicantes primos hallados y como columnas los minitérminos de la función.

		0	1	4	5	9	10	11	13	14	15
*	a (0,1,4,5)	√	√	√	√						
	b (1,5,9,13)		√		√	√			√		
	c (9,11,13,15)					√		√	√		√
*	d (10,11,14,15)						√	√		√	√
		√	√	√	√		√	√		√	√

Tildamos donde cada minitérmino pertenece a un Implicante primo y buscamos aquellas columnas que tengan un solo tilde. Al implicante primo que contenga este tilde lo marcarnos con un asterisco como **Implicante Primo Esencial (IPE).** Terminado el procedimiento usamos la última fila para ver si cubrimos todos los minitérminos. En este caso nos quedan sin cubrir los minitérminos 9 y 13. Para solucionar esto hacemos lo que llamamos **Tabla de Implicantes Primos Secundaria (TIPS).** En la misma colocamos los minitérminos no cubiertos y los implicantes primos no esenciales. O sea:

	9	13
b (1,5,9,13)	√	√
c (9,11,13,15)	√	√

Vemos que estos dos implicantes tienen tildes exactamente en las mismas columnas. Por lo tanto podemos dar la siguiente definición.

Definición: "Cuando dos renglones de una tabla reducida (secundaria) de implicantes primos cubren los mismos minitérminos, es decir, tienen marcas exactamente en las mismas columnas, se dice que son "intercambiables".

En este caso, al ser intercambiables, en la fórmula mínima va uno u otro, pero no los dos. Por lo tanto me quedan dos fórmulas mínimas, donde estarán los dos IPE "a" y "d" hallados anteriormente, más una que contenga a "b" y otra que contenga a "a", llamados IPES (Implicantes Primos Esenciales Secundarios) ya que fueron obtenidos a partir de la TIPS.
El resultado final será:

$$F_1 = \bar{A}.\bar{C} + A.C + \bar{C}.D$$

$$F_2 = \bar{A}.\bar{C} + A.C + A.D$$

Vemos que cuando hay implicantes primos intercambiables siempre hay más de una función mínima.

Veremos ahora el siguiente ejercicio:

$$F (A,B,C,D) = \sum m(0, 2, 4, 5, 6, 11, 13, 14, 15)$$

Aplicando el método de Quine-Mc Cluskey (aquí lo obviamos) llegamos a la conclusión que hay 7 Implicantes Primos cuya TIP es la siguiente:

	0	**2**	**4**	**5**	**6**	**11**	**13**	**14**	**15**
a (0,2,4,6)	√	√	√		√				
b (4,5)			√	√					
c (5,13)				√			√		
d (13,15)							√		√
e (14,15)								√	√
f (11,15)						√			√
g (6,14)					√			√	

Siguiendo con el razonamiento antes mencionado vemos que solo hay dos IPE, el "a" y el "f". El primero porque tiene un solo tilde en las columnas 0 y 2. El segundo porque tiene un solo tilde en la columna del minitérmino 11. Esta situación la vemos en la siguiente figura:

		0	**2**	**4**	**5**	**6**	**11**	**13**	**14**	**15**
*	**a (0,2,4,6)**	√	√	√		√				
	b (4,5)			√	√					
	c (5,13)				√			√		
	d (13,15)							√		√
	e (14,15)								√	√
*	**f (11,15)**						√			√
	g (6,14)					√			√	
		√	√	√		√	√			√

Como se observa nos falta cubrir los minitérminos 5, 13 y 14. Para lo cual recurrimos a la TIPS:

	5	13	14
b (4,5)	√		
c (5,13)	√	√	
d (13,15)		√	
e (14,15)			√
g (6,14)			√

Pareciera que esta TIPS no tuviera solución con los conocimientos adquiridos hasta ahora, sin embargo vemos que el implicante "c" tiene miniterminos en común con el "b" y el "d" y que además tiene otro tilde en otra columna. Antes de seguir vemos la siguiente definición:

Definición: "Dados dos renglones de una tabla reducida(secundaria) de Implicantes Primos, se dice que un renglón domina a otro, si el primero tiene marcas en las mismas columnas en las que tiene el segundo renglón y cuenta, además, con una marca por lo menos en una columna en la cual el segundo no la tiene".

Volviendo al ejercicio, vemos que el "c" domina tanto al "b" como al "d". En este caso los dominados se eliminan y quedan los dominantes, o sea la TIP me queda:

	5	13	14
c (5,13)	√	√	
e (14,15)			√
g (6,14)			√

Ahora me quedan el IP "c" y dos intercambiables, el "e" y el "g". O sea que tendremos dos funciones mínimas, formadas por los IP que vemos en la fórmula:

Fmin = a + f + c + e

Fmin = a + f + c + g

Adonde a "a" y a "f" llamamos IPE y a "c", "e" y "g" llamamos IPES (Implicantes Primos Esenciales Secundarios) por haber sido obtenidos en dicha tabla.

Teorema: "Sean "a" y "b" renglones una tabla reducida (secundaria) de implicantes primos, de tal manera que el costo de "a" es menor o igual al costo de "b". Entonces sí

"a" domina a "b" o sí "a" y "b" son intercambiables existe una suma mínima de productos que no incluye a "b".

El método de Quine-McCluskey se puede modificar para manejar las funciones con redundancias o don´t care. Al determinar los implicantes primos se deben incluir los opcionales (redundancias o don´t care) en la lista de minitérminos. De esta manera, se asegura que se incluyen todos los grupos que se pueden formar utilizando los opcionales. A continuación, al formular la tabla de implicantes primos, **se anotan solo los minitérminos como columnas (no las redundancias).** Esto asegura que se seleccionarán solo los implicantes primos necesarios para cubrir los minitérminos. A continuación veremos un ejemplo de esto:

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0, 1, 4, 5, 9, 11, 15) + \sum r(2, 6, 7, 13)$$

Es el mismo ejercicio anterior pero ahora algunos términos que eran minitérminos están puestos como redundancias.

Primer paso:

m	A B C D	C1
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	1
2	0 0 1 0	1
4	0 1 0 0	1
5	0 1 0 1	2
6	0 1 1 0	2
9	1 0 0 1	2
7	0 1 1 1	3
11	1 0 1 1	3
13	1 1 0 1	3
15	1 1 1 1	4

Segundo paso:

	A B C D
(0,1)	0 0 0 x
(0,2)	0 0 x 0
(0,4)	0 x 0 0
(1,5)	0 x 0 1
(1,9)	x 0 0 1
(2,6)	0 x 1 0
(4,5)	0 1 0 x
(4,6)	0 1 x 0
(5,7)	0 1 x 1
(5,13)	x 1 0 1
(6,7)	0 1 1 x
(9,11)	1 0 x 1
(9,13)	1 x 0 1
(7,15)	x 1 1 1
(11,15)	1 x 1 1
(13,15)	1 x 1 1

Tercer paso:

	A B C D
(0,1,4,5)	0 x 0 x
(0,2,4,6))	0 x x 0
(1,5,9,13))	x x 0 1
(4,5,6,7))	0 1 x x
(5,7,13,15)	x 1 x 1
(9,11,13,15)	1 x x 1

Ahora vemos al generar la TIP que no incluimos las redundancias como columnas, esto se basa en que solo queremos cubrir los minitérminos de la función:

		0	1	4	5	9	11	15
*	(0,1,4,5)	√	√	√	√			
	(0,2,4,6)			√				
	(1,5,9,13)		√		√	√		
	(4,5,6,7)			√	√			
	(5,7,13,15)				√			√
*	(9,11,13,15)					√	√	√
		√	√	√	√	√	√	√

En este caso tenemos dos IPE, y con los mismos cubrimos todos los minitérminos. Por lo tanto la función mínima queda:

$$F = \bar{A}.\bar{C} + A.D$$

Para terminar, haremos el mismo ejercicio anterior, pero por maxitérminos, en ese caso nos queda la función de la siguiente manera:

$$F(A,B,C,D) = \prod M(3, 8, 10, 12, 14) \;.\; \prod r(2, 6, 7, 13)$$

M	A B C D	C1
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	2
6	0 1 1 0	2
7	0 1 1 1	3
8	1 0 0 0	1
10	1 0 1 0	2
12	1 1 0 0	2
13	1 1 0 1	3
14	1 1 1 0	3

Ordenando por cantidad de unos:

M	A B C D	C1
2	0 0 1 0	1
8	1 0 0 0	1
3	0 0 1 1	2
6	0 1 1 0	2
10	1 0 1 0	2
12	1 1 0 0	2
7	0 1 1 1	3
13	1 1 0 1	3
14	1 1 1 0	3

Agrupando nos queda:

	A B C D				A B C D
(2,6)	0 x 1 0	√		(2,3,6,7)	0 x 1 x
(2,3)	0 0 1 x	√		(2,6,10,14)	x x 1 0
(2,10)	x 0 1 0	√		(8,10,12,14)	1 x x 0
(8,10)	1 0 x 0	√			
(8,12)	1 x 0 0	√			
(6,7)	0 1 1 x	√			
(6,14)	x 1 1 0	√			
(3,7)	0 x 1 1	√			
(10,14)	1 x 1 0	√			
(12,13)	1 1 0 x				
(12,14)	1 1 x 0	√			

Hacemos la TIP:

*	(2,3,6,7)	√				
	(2,6,10,14)			√		√
	(8,10,12,14)		√	√	√	√
	(12,13)				√	
		√				

Tenemos un solo IPE, pasando a la TIPS:

	8	10	12	14
(2,6,10,14)		√		√
(8,10,12,14)	√	√	√	√
(12,13)			√	

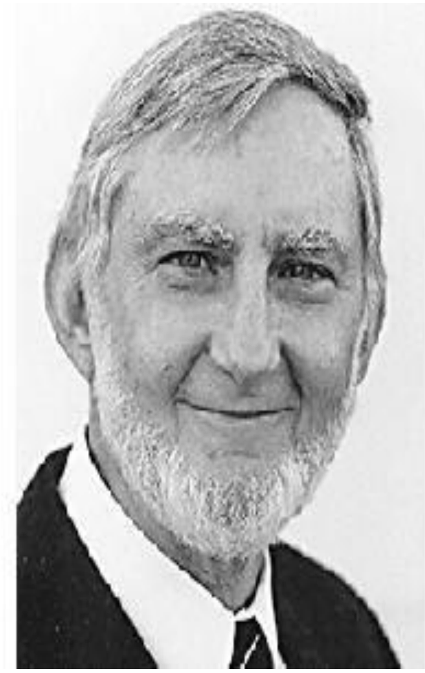
Vemos que el implicante primo (8,10,12,14) es dominante. Ahora escribimos la función resultante, recordar que como estamos simplificando por ceros, las **variables van con su valor negado y se anotan con PdS.**

$$F_{min} = (A + \bar{C}).(\bar{A} + D)$$

Antes de terminar este capítulo diremos que tanto los métodos de Karnaugh como el de Quine-McCluskey nos permiten encontrar los Implicantes Primos. Para encontrar una cobertura mínima debemos realizar la TIP y, si es necesario, la TIPS. En los ejemplos vistos siempre llegamos a una solución exacta, aunque tengamos intercambiables o dominantes, siempre tenemos una solución. Hay veces que esto no alcanza y necesitamos recurrir a otros métodos, por ejemplo el método de Petrick o a técnicas heurísticas. Estas últimas son las que nos interesan y empezaremos a desarrollarlas a continuación del apunte.

Maurice Karnaugh, (nacido el 4 de octubre de 1924 en la ciudad de Nueva York es un físico y matemático estadounidense, mejor conocido por el mapa de Karnaugh utilizado en el Álgebra de Boole. Estudió matemáticas y física en el City College of New York (1944-1948) y se trasladó a la Universidad de Yale para completar su licenciatura (1949), M.Sc. (1950) y Ph.D. en física con una tesis sobre La *Teoría de la Resonancia Magnética y duplicación de Tipo-Lambda en Óxido Nítrico* (1952).Karnaugh trabajó en los Laboratorios Bell (1952-1966), desarrollando el mapa de Karnaugh (1954), así como las patentes para la codificación PCM y la codificación de circuitos lógicos magnéticos. Más tarde, trabajó en la División Federal de Sistemas de IBM en Gaithersburg (1966-1970) y en el Centro de investigaciones Thomas J. Watson de IBM (1970-1989), estudiando las redes de interconexión multietapas. Karnaugh fue elegido Fellow de IEEE en 1976, y ocupó un cargo adjunto en la Universidad Politécnica de Nueva York en el campus Westchester 1980-1999.Está casado, desde 1970, con Linn Blank Weil y tiene dos hijos adultos, Robert y Paul de su primer matrimonio.

Willard Van Orman Quine. Nació el 25 de junio de 1098 en Ohio y murió el 25 de diciembre de 2000 en Boston. Fue un filósofo estadounidense, reconocido por su trabajo en lógica matemática y sus contribuciones al pragmatismo como una teoría del conocimiento. Estudió en el Oberlin College y en la Universidad de Harvard, donde llegó a ser profesor en 1936. Realizó un aporte fundamental a la teoría de conjuntos.



Edward J. McCluskey Nació el 16 de octubre de 1929 en Orange (Nueva Jersey), ingeniero estadounidense es actualmente profesor emérito en la Universidad de Stanford. Es un pionero en el campo de la Ingeniería Eléctrica. El Profesor McCluskey trabajó en sistemas de conmutación electrónica en los Laboratorios de Bell Telephone de 1955 a 1959. En 1959, se trasladó a la Universidad de Princeton, donde fue profesor de Ingeniería Eléctrica y Director del Centro de Computación de la Universidad. En 1966, se incorporó a la Universidad de Stanford, donde es actualmente Profesor Emérito de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación, así como Director del Centro de Computación Confiable. Él fundó el Laboratorio de Sistemas Digitales de Stanford (ahora Laboratorio de Sistemas Computacionales) en 1969 y el Programa de Ingeniería en Computación de Stanford (en la actualidad Programa de Maestría en Ciencias de la Computación) en 1970. El Foro Computacional de Stanford (una Programa Afiliado de la Industria) fue iniciado por el Dr. McCluskey y dos colegas en 1970, y fue su Director hasta 1978.